

RİSKE MARUZ DEĞER HESABINDA KARIŞIM KOPULA KULLANIMI: DOLAR- EURO PORTFÖYÜ

Demet ÇATAL¹

R. Serkan ALBAYRAK²

ÖZET

Riske Maruz Değer (RMD) hesaplamalarında portföyü oluşturan değerlerin bağımlılık yapılarının formu modelin performansı üzerinde büyük öneme sahiptir. Bu çalışmada yatırım araçlarının bağımlılık yapılarının bir çok formda modellenmesine olanak veren kopula çeşitleri, Dolar ve Euro portföylerinde incelenmiştir. İki yatırım aracının bağımlılık yapılarının negatif ve pozitif getiri bölgelerinde farklılık göstermesi nedeniyle bu bölgelere yönelik kopula karışımı önerilmiştir. Geleneksel metotlar, kopula fonksiyonları ve önerilen karışım kopulanın performansları geri dönük test ile ölçümlenmiştir. Türkiye’de döviz endeksleri üzerinde kopula alanında bir çalışma yapılmamış fakat hisse senetleri, bonolar ve hayat sigortası poliçeleri üzerinden modellemeler yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: RMD, Kopula, Karışım Kopula, Geriye Dönük Test.

¹ Yaşar Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Yüksek Lisans Öğrencisi,

² Yrd. Doç. Dr. Yaşar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü İşletme Mühendisliği Bölümü, raif.albayrak@yasar.edu.tr

ABSTRACT

Dependence structure set up of financial assets has substantial importance in the performance of Value at Risk calculations. In this article, copula variations that allow modeling of rich dependency structures of financial assets, in particular of Dollar - Euro portfolios are examined. Due to significant dependency regime differences in positive and negative returns, adoption of regional copula mixture is proposed. Performances of traditional VaR calculation methods, copulas and mixture copulas are compared by back testing. Although copulas have been applied to stock returns, bonds and life insurance policies, until now there have been no copula studies related to exchange rates for Turkish markets.

Key Words: VaR, Copula, Mixture Copula, Back Testing.

1. GİRİŞ

Riske Maruz Değer (RMD), belirli varsayımlar altında, bir portföy veya varlığın belirli bir güven aralığında ve belirli bir dönem içinde maksimum kaybını tahminleme yöntemidir. Özellikle portföyler için yapılan RMD hesaplamalarında portföyü oluşturan varlıkların birbirleriyle ilişkisinin portföyün genel riskinin belirlenmesinde önemli bir faktör olduğu bilinmektedir. Varlıkların getirilerinin birbirleriyle bağımlılık yapılarının doğrusal olduğu durumlarda standart istatistiki yöntemler RMD hesaplamasında kullanılabilir. Öte yandan varlık getirilerinin aralarındaki bağımlılık yapısı doğrusallığın dışında bir formda olduğu durumlarda bu bağımlılığı korelasyon katsayısı gibi tek bir istatistiki parametre ile ifade etme olanağı bulunmamaktadır. Kopulalar, bağımlılık formlarının modellenmesinde son dönemlerde sıklıkla pek çok farklı alanda kullanılmaktadır (Nelsen, 2006). Bağımlılık yapılarının risk hesaplamalarında son derece önemli olduğu finans literatüründe de kopula uygulamalarına gittikçe artan oranlarda rastlanabilmektedir (Cherubini vd., 2004). RMD hesaplamalarında kopula kullanımının ilgili finansal piyasanın karakteristiklerine bağlı olarak, risk hesaplamalarında gereksiz bir karmaşıklığa yol açma ihtimali olduğu gibi, kullanımının yüksek oranda verimlilik sağladığı durumlar da görülebilmektedir. Dolayısıyla kopulaların bazı piyasalarda risk hesaplamalarında başarılı uygulamalarının olması diğer piyasalarda da benzeri bir başarıyı göstereceği anlamına gelmez. Bu nedenle literatürde her piyasaya özgü kopula çalışmalarının bulunduğunu görmekteyiz. Piyasa özelliklerine göre şekillenen bağımlılık yapıları da farklı kopula formlarının kullanılmasını gerektirmektedir. Literatürde Türkiye piyasasına yönelik iki adet çalışmaya rastlanmıştır. Çifter ve Özün'ün (2007) çalışmasında varlıkların riske maruz değeri bir günlük Türk Lirası faiz oranı ile günlük ABD Doları/TL döviz kurundan oluşan eşit ağırlıklandırılmış bir portföye ait riske maruz değer; delta normal, EWMA, dinamik koşullu korelasyon ve koşullu simetrik joe-clayton copula yöntemleriyle tahmin edilmiş ve geriye dönük testlerle koşullu kopula yönteminin daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Ayrıca yatırım fonu stratejileri arasındaki bağımlılığı kopula ile modellenmesi ve bir uygulama Türkiye'de bu alanda yapılan çalışmalardan biridir. Avutman (2011) tezinde yatırım fonları üzerinde durmuş ve Finansbank'a ait iki tip ve iki farklı stratejide oluşturulan fonları kopula ile modelleyerek arasındaki bağımlılık yapısını incelemiştir.

Bu makalede, RMD hesabında kullanılan parametrik yöntemi kopula ile zenginleştiren bir model geliştirilmiştir. Bu model Türk finans piyasasında bulunan portföylerde en sık kullanılan varlıklar olan Euro ve Dolar Endeksi ile çalıştırılmıştır. Modelin diğer RMD

hesaplama yöntemlerine göre performansı Geriye Dönük Test yöntemi kullanılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Makalede bir sonraki bölümde sırasıyla Riske Maruz Değerin kopula kullanılmadan yapılan hesaplama yöntemleri, Geriye Dönük Test yöntemi ve genel olarak kopulalar kısaca anlatılmıştır. Bir sonraki bölümde Simülasyon yöntemiyle yapılan RMS hesabında kopula kullanımı özetlenmiştir. Dördüncü bölümde bu makalede geliştirilen Parametrik RMS hesabında kopula kullanımı açıklanmıştır. Beşinci bölüm farklı RMS yöntemlerinin karşılaştırmalarını içerir ve son bölüm ile makale sonuçlandırılmaktadır.

2. METODOLOJİ

2.1. RİSKE MARUZ DEĞER

RMD analizi yöntemleri gerek tek bir yatırım aracının, gerekse birden fazla yatırım aracından oluşan portföylerin riskini doğrudan hesaplanabilmesine imkân sağlamakta ve yatırımcıların yatırım süreçlerine yön verebilmektedir.

RMD temel olarak, risk yönetiminin zorunlu olduğu büyük alım-satım portföylerine sahip bankalar, emeklilik fonları, diğer finans kurumları, sektörü denetleme ve kontrol faaliyetinde bulunan düzenleyici kurumlar ve elinde bulundurdukları finansal enstrümanlar nedeniyle finansal riske maruz kalan finans dışı kurumlarda kullanılmaktadır (Jorion, 2000). Bu kurumlarda RMD'nin kullanım alanları, toplam riskin ölçülmesi ve raporlanması açısından pasif kullanım, pozisyon limitlerinin belirlenmesi ve buna bağlı olarak riskin belirlenerek risk kontrolünün yapıldığı defansif kullanım ve son olarak riskin yönetilmesi açısından aktif kullanım olarak üç kategoride sınıflandırılabilir (Dowd, 1998).

Finansal riskin yönetiminde RMD tekniklerinin, 1990'lı yılların başında yaşanan finansal skandallar sonrasında ortaya çıktığını ve geliştiği görülmektedir. Türkiye'de finans alanında RMD yönteminin piyasa riski ölçümünde kullanılması 1999 yılında yürürlüğe giren yeni Bankalar Kanunu ile risk yönetimi ve iç kontrol sistemlerinde zorunlu hale getirilmiştir. Risk ölçüm metodlarının belirlenmesinde portföy getirisinin, portföyü oluşturan finansal varlıkların getirileri ile doğrusal bağımlılığı da önemli etkenlerden biridir. RMD'nin en büyük avantajı, risk faktörleri arasındaki korelasyonlarını da dikkate alarak farklı pozisyonları parasal tek bir değerde ifade edebilmesidir.

Zaman dilimi ve güven seviyelerini olmadan RMD değerleri anlamsızdır. Yatırımcılar aktif portföylerle ticaret yaptıkları için finansal şirketler bir günlük bir zaman dilimi, kurumsal yatırımcılar ve finansal olmayan şirketler uzun zaman dilimlerini tercih ederler

(Linsmeier ve Pearson, 1996). Sermaye gereksinimleri değerlendirilirken, güven seviyesi seçimi amaca bağlı olarak belirlenebildiğinden risk almaktan hoşlanmayan yöneticiler daha yüksek güven düzeyi seçebilirler.

Sembolik olarak, RMD hesabı; $RMD_{\alpha} = (\mu - Z_{\alpha} * \sigma) * W$ formülü ile ifade edilir. Burada α seçilen güven düzeyi, Z_{α} standart normal dağılımda α olasılığa denk gelen değer, μ portföy getirilerinin ortalaması, σ getirilerin riski, ve W başlangıç portföy değerini yansıtır (Jorion, 2001).

Buna göre, başlangıç portföy değeri "1 milyon, portföy getirilerinin yıllık getirisi % 15, risk %10 olduğunda portföy için% 99 güven düzeyinde 25 günlük RMD hesaplanması aşağıdaki sonucu verir:

$$RMD_{99\%} = (\%15 - 2.33 * \%10 * \sqrt{25/250}) * 1M = -76,318$$

Formülde karekök içinde bir yıl 250 ticaret günü olarak varsayılmıştır. Bu sonuca göre %7.63'ün altında bir kaybın gerçekleşme ihtimali yüzde bir seviyesindedir. Görülebileceği gibi normallik varsayımı altında, RMD hesaplama çok basittir.

2.1.1. Riske Maruz Değer YAKLAŞIMLARI

Riske Maruz Değer hesaplamalarında parametrik modeller risk faktör dağılımlarının istatistiksel parametrelerini esas alırken parametrik olmayan modeller simülasyon ve tarihsel model olmak üzere ikiye ayrılır (Amman ve Reich, 2001). Fiyat hareketlerinin normal dağılıma uymadığı durumlarda farklı getiri dağılımlarına sahip olan portföyler için beklenen değişimlerin kendine özgü olasılığının olması ve RMD hesaplaması zorluğu nedeniyle simülasyona dayalı yöntemler sağlıklı sonuçlar vermektedir (Bolgün ve Akçay). Bu bölümde en yaygın üç RMD hesaplama yöntemi olan varyans-kovaryans yaklaşımı, tarihsel simülasyon ve Monte Carlo simülasyonu özetlenmiştir.

2.1.2. VARYANS-KOVARYANS YAKLAŞIMI

RMD hesaplamalarında kullanılan parametrik yöntemlerde, finansal varlık getirilerinin ve portföy riskinin normal dağılıma sahip, risk faktörleri ile doğrusal bir ilişki içinde olduğu kabul edilmektedir. Bu yöntemlerde, portföyün geçmiş getiri serilerinden elde edilen standart sapma ve korelasyonlardan oluşan temel parametreler hesaplanarak varyans-kovaryans matrisi hesaplanmakta ve buna göre portföyün RMD'si hesaplanarak beklenen kayıplar tahmin edilebilmektedir. Getiri dağılımlarına yönelik farklı varsayımlar RMD formülünün değişmesini yol açar. Söz gelimi, eğer getiri dağılımının yukarıdaki örnekle aynı parametrelerle (% 15 ortalama ve % 10 risk) log-normal olduğu varsayıldığında;

$$RMD_{99\%} = \left(\%15 - \frac{\%10^2}{2} - 2.33 * \%10 * \sqrt{25/250} \right) * 1M = 71,318$$

daha düşük bir RMD değeri hesaplanır. Benzeri mantık getiri dağılımı için farklı bir olasılık modeli öngörüldüğünde çalışır. Bu durumda varsayılan modelin parametreleri en çok olabilirlik kestirimi yöntemiyle bulunur.

2.1.3. Tarihsel Simulasyon

Tarihsel simülasyon, getirilerin normal dağılması gibi bir varsayım içermemekle birlikte volatilité, korelasyon ya da başka parametrelerin hesaplanmasına da gerek duymadığı için RMD hesabında modelden kaynaklanan hesap hatası riskini azaltmaktadır. Bu yaklaşımda, portföyün tarihsel veri değerinin ampirik dağılımı üzerinden tespit edilen RMD değeri, tarihin birebir tekerrür edeceği varsayımı kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu varsayım genellikle makul olsa da, tarihsel veri seti tarafından yakalanan çok yüksek oynaklık dönemlerinde aşırı kuyruk olasılıkların bulunmasına yol açabilir (Dowd, 1998). Bu yöntemin temelinde yatan varsayım, tarihsel getirilerin dağılımının portföyün sonraki tutma süresine yönelik iyi bir referans olmasıdır (Dowd, 1998).

2.1.4. Monte Carlo Simulasyonu

Monte Carlo simülasyonu, opsiyonlar gibi doğrusal olmayan getiri yapısına sahip finansal varlıkları içeren karmaşık portföylerin RMD hesaplamalarında kullanılan bir yöntemdir (Morgan, 1996). Monte Carlo simülasyonu tarihsel simülasyona benzemekle birlikte, tarihsel simülasyon yönteminde varsayımsal portföy kar ve zararlarının oluşturulmasında gerçek verilerden yararlanılırken, Monte Carlo simülasyonunda fiyatlardaki olası değişimleri yansıtan bir istatistikî dağılım seçilerek gerçek olmayan rassal değerler kullanılmaktadır (Duman, 2000).

Monte Carlo simülasyonu RMD hesaplaması şu adımları içerir:

1. RMD hesabında kullanılacak $1-\alpha$ güven aralığının belirlenmesi,
2. Monte Carlo simülasyonu portföyü oluşturan varlıkların birleşik dağılımlarından çok sayıda değer üretilerek ilgili dönem için her bir varlığa ait getiri kestiriminin yapılması,
3. Varlık kestirimlerinden faydalanarak portföy kestirimlerinin hesaplanması. Eğer birleşik dağılımdan her bir varlık için m adet simülasyon yapıldı ise hesaplanan portföy getirileri $P_{t+1,1}, P_{t+1,2}, \dots, P_{t+1,m}$ şeklinde gösterilebilir.
4. Hesaplanan portföy getirileri küçükten büyüğe doğru sıralandığında yüzde α en kötü getiri tahmini listeden ayıklanır.

5. Listede geriye kalan değerler içinde minimum getiri tahmini RMD olarak belirlenmiş olur.

Monte Carlo simülasyonun gücü, getiriler için normallik varsayımı yapılmamasından kaynaklanır. Parametrelerin tahmini tarihsel verilerden yola çıkılarak yapılırsa da, sisteme rahatlıkla öznel yargılar veya diğer bilgi dahil edilebilir. Öte yandan, fiyatlandırma modelleri ve temel stokastik süreçler hakkında yanlış varsayımlar RMD'nin olduğundan düşük veya yüksek hesaplanmasına neden olabilir.

3. Geriye Dönük Test Yöntemleri

Günümüzde gerek finans kurumları gerekse finans dışı kurumlar tarafından standart bir risk ölçüm aracı olarak kullanılan RMD tekniklerinin performansını ölçmek üzere geriye dönük test yöntemlerinin kullanımı gündeme gelmiştir. Geriye dönük test, portföylerin gerçekleşmiş kâr ve zarar değerleri ile hesaplanan RMD modeli değerlerini gerçek gözlemlerle karşılaştırıp RMD modelinin doğruluğunu test etmektedir. Özellikle bankalar, kullandıkları risk ölçüm modellerinin performansını ölçmek için, portföy getirileri risk ölçüm modelleri ile tahmin ettikleri riske maruz değer rakamlarıyla karşılaştırmak suretiyle sapma sayısını tespit etmek zorundadırlar. Bu bölümde RMD modelleri için kullanılan geriye dönük test yöntemi Pearson (χ^2) Ki-kare uyum iyiliği testi özetlenmiştir.

3.1. PEARSON (χ^2) KI-KARE UYUM İYİLİğİ TESTİ

Ki-Kare uyum iyiliği testi, istatistiki modeller için gözlenen ve beklenen veri frekansları arasındaki farkları temel alır. RMD modeli de gözlemlerin belli bir sınırın altında gerçekleşmesi ihtimalini hesaplar. Model tahminleri zaman içinde devinirken gözlemlenen sınır dışı değerlerin oranı ile beklenen oran arasında farklılıklar oluşabilir. Ki-kare uyum iyiliği testi bu farklılığın istatistiki anlamlılığını test eder. RMD modelleri için Ki-Kare uyum testinin kullanımı için teste tabi veri pencere adı da verilen gruplara ayrılır. Verinin k gruba ayrıldığı ve her bir grubun içinde n adet gözlem olduğu varsayalım. RMD modeline göre sınır dışı gözlem oranı p_i^0 , dolayısıyla beklenen sınır dışı gözlem adedi np_i^0 olur. Her grup içinde sınır dışı gözlem adedi n_i ile gösterildiğinde,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_{oi})^2}{np_{oi}}, i=1,2, \dots, k$$

gözlem ile beklenen frekansların farkına yönelik Ki-Kare test istatistiği olur. Bu test istatistiği asimtotik olarak bir serbestlik derecesiyle ki-kare dağılır (Dong ve Giles, 2004).

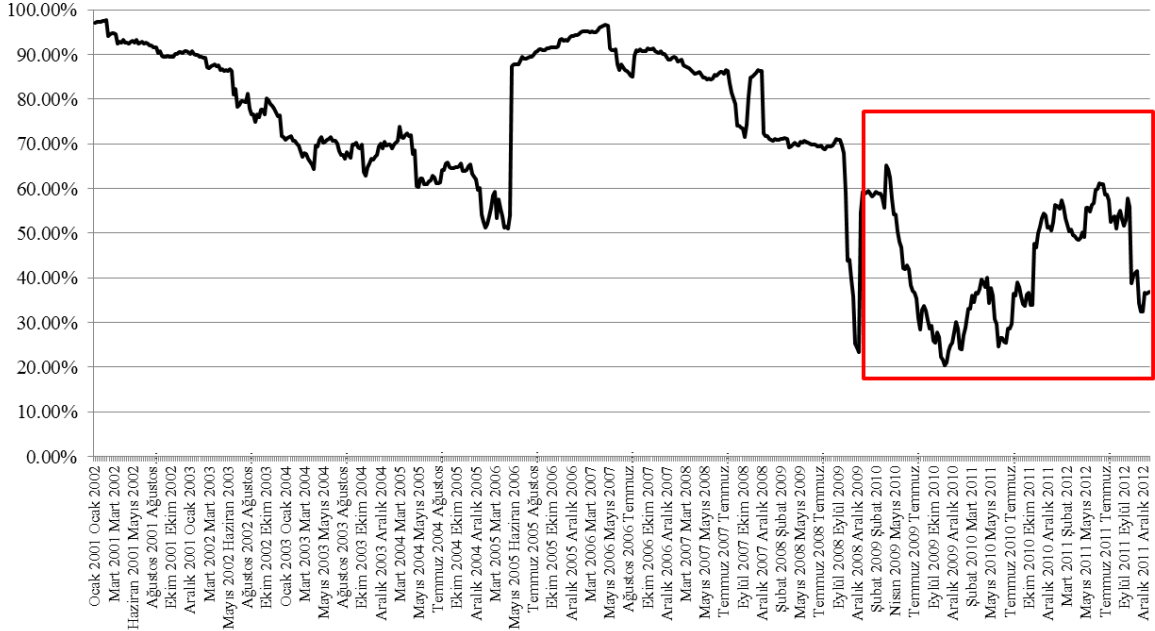
4. Kopula

Çok değişkenli dağılımların geleneksel gösterimleri tüm rastgele değişkenlerin aynı marjinal dağılıma sahip olduğunu varsayar. Bu gösterimlerde, değişkenler arasındaki bağımlılık yapıları korelasyon katsayı ile ifade edilmektedir. Özellikle yatırım araçlarının bağımlılık yapıları için bu yaklaşımın yetersiz kaldığı durumlar olabilmektedir. Finansal modelleme yapan analistlerin amacı, iyi bilinen fonksiyonel formlar ile ortak dağılım belirterek RMD hesaplarının daha anlaşılır sonuçlar vermesini sağlamaktır. Bu fonksiyonel formlar kopula yardımı ile birbirine bağlandığında varlık getirileri arasında lineer olmayan çapraz bağımlılıklar, kalın kuyruk ve hatta normal olmayan etkiler modellenebilir. Kopula, marjinallerin formlarına bakılmaksızın bağımlılık yapılarını yakalayabildiğinden RMD hesaplamasında portföyü oluşturan varlıkların bağımlılık yapılarının belirlenmesinde dolayısıyla kovaryans yapısının modellenmesinde büyük esneklik sağlamaktadır. Kopulaların kuramsal altyapısı ve özellikleriyle ilgili kullanılabilir pek çok kaynak bulunmaktadır. Örneğin; Nelsen (2006) kopulaların genel anlamda matematiksel özelliklerini ve türetimlerini anlatmaktadır. Aynı kaynakta kopula kullanılarak üretilen çok değişkenli dağılımların simülasyon algoritmaları da derlenmiştir. Literatürde, Embrechts, Lindskog and McNeil (2003) finans alanında genel kopula uygulamaları örnekleri sunar. Ayrıca Cherubini, Luciano and Vecchiato (2004) sermaye portföy yaklaşımı için kopula kullanımını incelediler. Aynı çalışmada zamanla değişen korelasyon hakkında da yorum getirmişlerdir. Bu da kopulanın çıkış noktalarından biridir ve kopulanın neden kullanışlı olduğunu gösterir. Embrechts, McNeil and Straumann (2002) ve Embrechts, Hoing and Juri (2003) risk sınırlarını aşırı değer modeli ile belirlemek için kopula kullandılar. Li (2000) Gauss kopuladan faydalanarak finansal varlıkların korelasyon yapısını düzenledi. Gauss kopulasının adı değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının aynı çok değişkenli normal dağılımda olduğu gibi ikili korelasyon parametresi ile belirlenmesinden kaynaklanır. Ancak, Li (2000) varlıkların marjinal dağılımları için normal dağılım kullanmadı. Gauss ve Frank kopulaları varlıkların ekstrem değerlerinin bağımlılık yapılarının modellenmesinde kullanılamazlar, bu amaçla sağ kuyruk için Gumbel kopula, sol kuyruk için ise Cook-Johnson kopula kullanılmaktadır. Cherubini and Luciano (2001) Arşimet kopula ve tarihsel veriden üretilen marjinal dağılımlar kullanarak RMD tahmini yaptılar. Fortin ve Kuzmics (2002), FSTE ve DAX borsa endeksleri oluşan bir portföyün RMD tahmini için kopulaların konveks lineer kombinasyonunu kullandı. Cherubini and Luciano (2001) Arşimet kopula ve marjinal dağılımlar tahmin etmek için tarihsel ampirik dağılım kullanılarak RMD tahminini, Meneguzzo ve Vecchiato (2002), kredi türevlerinin risk modellemesi için kopula kullanmıştır.

McNeil, A.J., Frey, R., and Embrechts (2005) kantitatif risk yönetimi teorik kavramları ve modelleme teknikleri kapsamlı bilgi sağlamaktadır. Bu kitabı finansal risk analistleri, aktüerler, düzenleyiciler veya kantitatif finans öğrencileri pratik araç olarak kullanabilir. Karışım kopula, genellikle finans ve ekonomi alanında farklı korelasyon parametreleri olan kopulaların doğrusal bir kombinasyonu olarak kullanılmaktadır. Bağımlılık yapısını özetlemek için basit ama esnek bir modeldir. Hu (2003) tarafından finansal piyasalardaki önceden belirlenmiş bileşenlerdeki bağımlılığı ölçmek için karışım kopula yaklaşımı kullanılmıştır. Gaussian, Gumbel ve Gaussian yaşam kopulaları birleştirilerek karışım kopula oluşturulmuştur. Gaussian kopula temel alınıp geleneksel gösterimle diğer iki kopula ile sağ ve sol kuyruk olarak birleştirilerek bağımlılığın hesaplanmasında kullanılmıştır. Bu durumda karışım kopula birden fazla kopuladan oluşturulduğu için tek boyutlu kopuladan daha esnek bir yapıya sahiptir. Ayrıca karışım kopula, spearman rho katsayısı ile maksimum kopula, bağımsız kopula ve minimum kopula için lineer birleşim olarak da tanımlanmıştır (Ouyang vd., 2009).

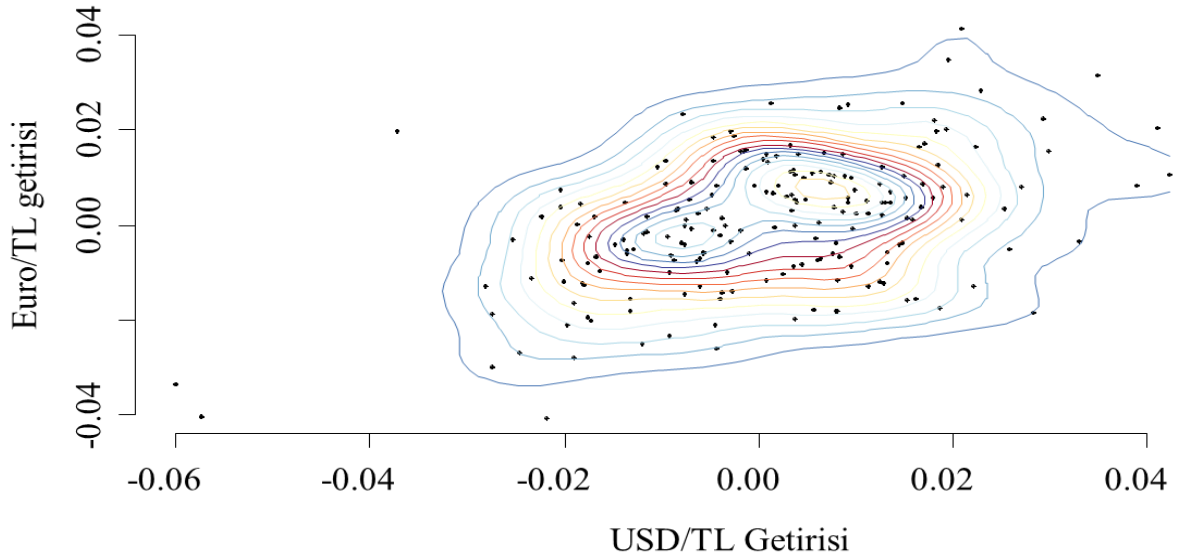
4.1. Veri

Bu çalışmada Euro ve Dolar'ın TL karşısında getirilerinden oluşan bir portföy üzerinde RMD analizi yapılmıştır. Bu amaçla Ocak 2001- Aralık 2012 arasındaki Euro ve Dolar kurlarının hafta sonu kapanış değerleri üzerinden getiriler hesaplanmıştır. Veriler her iki kur için 201 gözlemden oluşmaktadır. Şekil 1'de bu dönem içinde yatırım araçlarının 50 haftalık kayan pencereler içinde hesaplanan korelasyonlarının değişimi gösterilmiştir. Nisan 2005-2006 ve Kasım 2008-2009 dönemlerinde yaşanan şoklar dışında iki yatırım aracı arasındaki korelasyon 2001-2009 arasında %90'lardan %60'lara düzenli bir gerileme rejimi sergilemiştir. Ocak 2009'dan itibaren korelasyon %60-%20 bandı arasına sıkışmıştır ve bu aralıkta belirgin bir eğilim göstermemektedir. RMD hesabında veri olarak Ocak 2009 – Aralık 2012 değerleri kullanılmıştır.



Şekil 1 :DOLAR-EURO getirilerinin korelasyon Değişim Grafiği

Bu dönemde Dolar ve Euro'nun getirilerinin nokta diyagramı Şekil 2'de gösterilmiştir. Şekil döviz kuru getirilerinin bağımlılık yapıları için iki ayrı rejimin varlığına işaret etmektedir. Birden fazla bağımlılık rejiminin olduğundan şüphe edilen durumlarda karışım kopula kullanılarak bölgesel bağımlılık yapıları modellenilebilir.



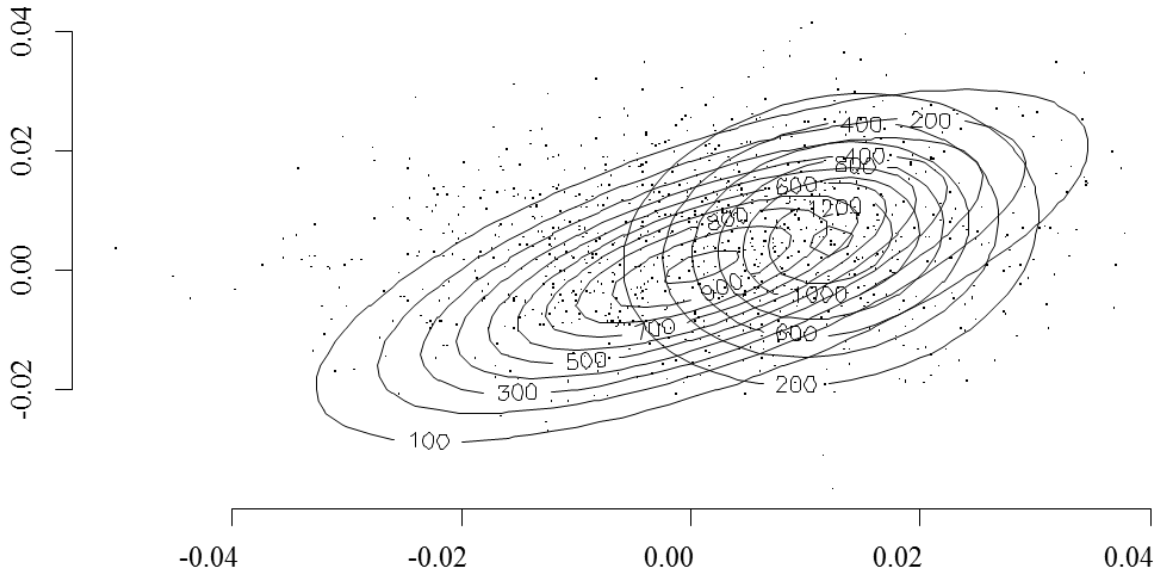
Şekil 2: Dolar ve Euro getirilerinin nokta diyagramı

Literatürde kopula kullanılan RMD hesaplamalarında portföyler çok değişkenli olasılık dağılımlarından Monte Carlo simülasyonu ile değerlerin üretilip, getirilerin tek boyutlu bir histogram üzerinde incelenmesiyle RMD hesabı yapılmaktadır. Ancak birleşik dağılım belirlenirken, marjinal dağılımlar veriden faydalanılarak hesaplanan momentlerle belirlenir. Bu çalışmada kullanılan haftalık Dolar ve Euro için ortalama getiriler, % 0.0956405 ve

%0.06581264, standart sapmalar ise sırasıyla % 1.557804 ve % 1.36487 olarak hesaplanmıştır. Bu iki moment, marjinal dağılımlarda kullanılacak normal dağılım parametrelerinin belirlenmesi için yeterlidir. Bu aşamadan sonra iki yatırım aracı arasındaki bağımlılığı modelleyebilecek uygun kopula modeline karar verilmelidir. Veride gözlemlenen çift tepeli yapı ile karakterize edilebilen bağımlılık yapısını modellemek için iki normal kopuladan oluşan karışım kopula uygun bir seçimdir. Her bir kopula için belirlenmesi gereken d parametresi,

$$d = \sin(\pi/2 * \rho)$$

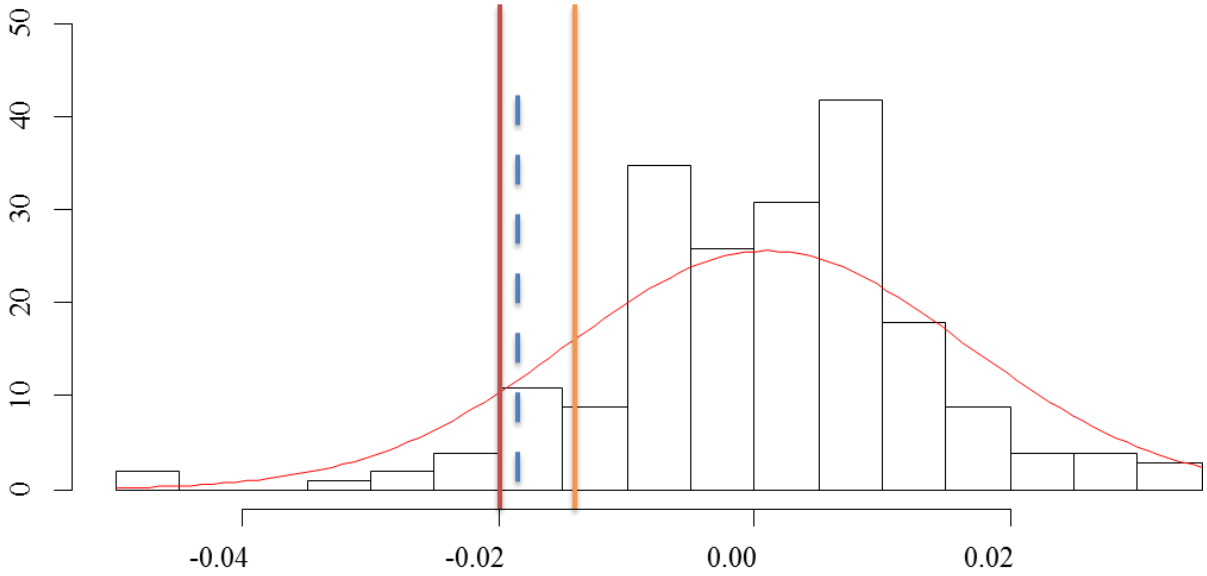
ile hesaplanmaktadır. Formüldeki ρ , iki değişken arasındaki korelasyondur. Şekil 3'te Euro ve Dolar getirileri için bu şekilde oluşturulan karışım kopula gösterilmiştir. Ayrıca karışım kopula üzerinde de görüldüğü üzere dolar getirisinin pozitif olduğu bölgede korelasyon yapısı ile, getirinin negatif olduğu bölgede ise korelasyon yapısı arasındaki fark açıkça görülmektedir.



Şekil 3: DOLAR-EURO getirilerinin uygun kopula modellenmesi

Kopula modeli ile marjinal dağılımlar birleştirildiğinde, RMD hesabında kullanılacak birleşik dağılım elde edilmiş olur. Bu aşamadan sonra Monte Carlo simülasyonu ile dağılımın her bölgesinden değerler üretilir ve portföy getirileri hesaplanır. RMD, bu şekilde hesaplanan getiriler içinde en düşük %5'lik sınırı işaretlemektedir. Şekil 4'te eş ağırlıklı Euro-Dolar portföyü için hesaplanan RMD değerleri gösterilmiştir.

RMD değeri hesaplamak için Dolar ve Euro verisinde tarihsel getirilerin dağılımından eşit ağırlıklarda alınarak bir portföy oluşturulmuş ve hesaplanan RMD değerleri şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4: RMD için klasik kopula-Monte Carlo simülasyonu, tarihsel simülasyon ile belirlenen noktaların histogram üzerinde gösterimi

Şekil 4'te, literatürde kullanılan standart kopula-Monte Carlo RMD portföyü kırmızı renkte solda tarihsel RMD değeri mavi renkte, en sağda turuncu renkte ise modellenen kopulanın RMD değerleri gösterilmiştir.

4.2. MODELİN PERFORMANSI

Şekil 4'te histogram üzerinde gösterilen klasik kopula-Monte Carlo, tarihsel ve bu makalede tanıtılan modelle elde edilen RMD değerlerinin performansı geriye dönük testler kullanılarak karşılaştırılmıştır. Geriye dönük test için her üç RMD hesaplama yönteminde 201 veri genişliğinde bir veri penceresi içinde hesaplama yapılmıştır. Bu çalışmada kullanılan Euro ve Dolar getirileri 201 haftayı kapsamaktadır. Dolar ve Euro portföyleri için dolar ve euro getirilerinin ağırlığının eşit olduğu durumlara denk düşen RMS hesabı %1, %5 ve %10 olarak hesaplanmış ve pencere boyutları 25 hafta ve 50 hafta için geriye dönük test sonuçları incelenmiştir. Pencere boyutu RMD modeli oluşturmak için kullanılan veri miktarını belirlemektedir. Pencere boyutunun 25 hafta olması, RMD modelinin kayan 25 hafta genişliğinde veri ile oluşturulup 26. hafta hakkında tahmin yapması anlamına gelmektedir. Geriye dönük testlerin sonuçları Tablo 1.'de verilmiştir. Bu makalede tartışılan karışım kopula, sırasıyla Hull-White (Roy, 2011), Tarihsel, En çok Olabilirlik Kestirimi, Normal kopula, T kopula, Frank kopula ve Clayton kopula bağımlılık modelleriyle karşılaştırılmıştır. Tablo 1. içindeki değerler bir serbestlik derecesine sahip Pearson uyum iyiliği istatistikleridir. Örneğin, 25'lik kayan pencere boyutunda, %1 RMD için, Tarihsel RMD modelinin istisna adedi ile beklenen istisna adedi için hesaplama şu şekilde yapılmıştır:

1. Veri adedi 201 hafta ve pencere boyutu 25 olduğu için teste tabii hafta adedi 176'dır.

2. Hipoteze göre RMD yüzdesi için $176 \times \%1 = 1.76$ adet istisna ve $176 - 1.76 = 174.24$ istisna olmayan gün belirlenmelidir.
3. Model toplam 7 istisna ve 169 istisna olmayan gözlem vermektedir.
4. Test istatistiği hesaplanır: $\chi^2 = \frac{(1.76-7)^2}{1.76} + \frac{(174.24-169)^2}{174.24} = 15.758$. Bu istatistiğin serbestlik derecesi birdir.
5. Diğer pencere boyutları ve RMD yüzdeleri için istatistik benzeri şekilde hesaplanır.
6. Satırlar arası bağımsızlık varsayımı altında istatistiklerin (sütun) toplamları altı serbestlik derecesinde ki-kare dağılırlar.
7. En son satırda bulunan P değerleri toplam için ki-kare dağılımından gelen sağ kuyruk alanıdır.

Tablo 1. Geriye Dönük Test Sonuçlarına göre modellerin performansları.

Pencere Boyutu	RMD	Uyum İyiliği Ki Kare (1) Değerleri							
		Hull-White	Tarihsel	EOK	Karışım Kopula	Normal Kopula	T Kopula	Frank Kopula	Clayton Kopula
25	0,01	0,882	15,758	0,882	0,033	0,033	0,033	0,882	0,331
25	0,05	0,388	3,234	0,388	0,077	0,388	0,388	0,579	0,388
25	0,1	1,336	0,364	0,427	0,162	0,818	0,427	0,364	0,427
50	0,01	0,174	0,161	0,174	0,174	0,174	0,174	0,174	0,174
50	0,05	2,886	0,042	0,335	0,293	4,295	4,295	0,028	2,886
50	0,1	6,093	0,089	0,325	0,089	1,914	1,237	0,060	0,707
Toplam Ki Kare Değeri (6)		11,760	21,344	5,256	1,058	11,410	10,341	2,089	7,639
P Değeri		6,75%	0,16%	51,15%	98,33%	7,65%	11,10%	91,14%	26,58%

Tablo 1.'de okunan değerlere göre en başarılı performansı en yüksek p-değeri ile Karışım Kopula bağımlılık modelleme yöntemi vermiştir. Frank Kopula'nın RMD hesabındaki başarısı literatürdeki bulguları destekler niteliktedir. En basit yöntem olan Tarihsel RMD hesabı geriye dönük teste göre başarısız olmuştur. Karışım kopula ile yapısal olarak daha basit bir form olan Frank kopula kullanan RMD modelleri diğer modellere göre çok daha başarılı performans göstermiştir. Pencere boyutunun düşük tutulduğu (25 hafta) ilk test grubunda karışım kopula kullanan RMD modeli diğer tüm modellerden daha başarılı olmuştur. Bu grupta Frank kopula'da genel de sağladığı başarıyı tekrar edememiştir. Pencere genişliği 50 haftaya çıkarıldığında ise Karışım kopula, Frank kopulaya oranla daha düşük performans vermiştir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Türkiye'deki finansal varlıkların risk yönetiminde güncel bir yaklaşım olan RMD analizi yöntemleri, RMD'nin ayrılmaz bir parçası olduğu düşünülen geriye dönük testler ve kopula modeli kullanılarak oluşturulan dolar/euro portföyünün 2009-2012 dönemine ait 201 haftalık veri ile %90,%95, ve %99 güven düzeyinde piyasa riskleri hesaplanmıştır. Kopulalar, marjinal dağılımlar arasında bağımlılık yapıları tanımlayarak çok değişkenli olasılık dağılım fonksiyonları üretmekte kullanılırlar. Kopulalar sayesinde, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı modelleri korelasyon katsayısı gibi sabit katsayı sınırlamalarından kurtulmakta ve esnek fonksiyonel formlarda betimlenebilmektedir. Bu sayede finansal portföylerin riskleri daha başarılı bir şekilde hesaplanabilmektedir. Bu çalışmada Euro ve Dolar portföylerinin getirilerinde kopulaların risk modellemesinde getirdiği fayda araştırılmıştır. Risk modellemesinde kopula kullanılmayan üç, kopuladan faydalanılan beş olmak üzere toplam sekiz model kurulmuş ve performansları karşılaştırılmıştır. Sonuçlar kopula kullanılan modellerin diğer modellerden daha başarılı olduğunu ortaya koymuştur. Kurulan modeller arasında en başarılı model karışım kopula modeli olmuştur. Karışım kopula modelinin başarısının altında yatan temel neden, Euro ve Dolar getirilerinin bağımlılık yapıları incelendiğinde açık bir şekilde iki farklı rejimin bulunmasıdır. Getirilerin pozitif ve negatif olduğu durumlarda yatırım araçları arasındaki bağımlılık farklılık göstermektedir. Karışım kopula, farklı bölgelere odaklı bağımlılık formları modelleme yeteneği sayesinde diğer kopula modellerinden başarılı olmuştur. Kopula kullanılarak bağımlılık yapılarının modelleme çalışmaları hala deneysel yürütülmektedir. Bu nedenle literatürde metot olarak birbirine çok benzer ancak farklı yöresel piyasalarla ilgili çalışmalara sıkça rastlanılmaktadır. Türk piyasasına yönelik kopula uygulamalarının gittikçe artan oranlarda literatürde yer alması beklenmektedir. Bu çalışma, kopula modellerinin zorluğuna rağmen risk modellemesinde fark edilir bir gelişim sağladığını göstermektedir. Özellikle global finansal krizlerin tetiklediği bağımlılık yapılarındaki rejim kaymalarının, karışım kopulalar sayesinde başarılı bir şekilde modellendiği de gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Ammann, M. & Reich, C. (2001). Value-at-Risk for nonlinear Financial Instruments—Linear Approximation or Full Monte-Carlo University of Basel, WWZ/Department of Finance, Working Paper No 8/01.
- [2] Avutman Ö. (2011). Yatırım fonu stratejileri arasındaki bağımlılığın copula ile modellenmesi ve bir uygulama. Yüksek lisans tezi, İstanbul.
- [3] Bolgün, K. Evren & Akçay, M. Barış (2005). Risk Yönetimi: Gelişmekte Olan Türk Finans Piyasasında Entegre Risk Ölçüm ve Yönetim Uygulamaları, (2. Baskı). İstanbul: Scala Yayıncılık.
- [4] Cherubini, U. Vecchiato, W. and Luciano, E. (2004). *Copula Methods in Finance*. Wiley. New York.
- [5] Cherubini & Luciano (2001). Value at risk trade-off and capital allocation with copulas. *Economic Notes* 30, 235-256.
- [6] Çifter, A. & Özün A.(2007). Koşullu Copula ve Dinamik Koşullu Korelasyon ile Portföy Riskinin Hesaplanması: Türkiye Verileri Üzerine Bir Uygulama, *Bankacılar dergisi*, sayı:61
- [7] Dowd, K. (1998). *Beyond Value At Risk: The new Science of Risk Management*. (1. Baskı). Chichester: John Wiley&Sons Ltd.
- [8] Dong, L.B. and Giles, D.E. A. (2004). An Empirical likelihood Ratio Test For Normality. Department of Economics, University of Victoria Victoria, B.C. Canada: V8W 2Y2.
- [9] Duman M.(2000). Bankacılık Sektöründe Finansal Riskin Ölçülmesi ve Gözetiminde Yeni Bir Yaklaşım: Value At Risk Metodolojisi. *Bankacılar Dergisi*. No:32, s.28.
- [10] Embrechts, P. Lindskog, F. and McNeil, A.J. (2003). Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*: S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, 329-384.
- [11] Embrechts, P. Hoing, A. ve Juri, A. (2003). Using copula to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics* 7, 145-167.
- [12] Embrechts, P. McNeil, A. ve Straumann, D. (2001). Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press, pp. 176–223.
- [13] Hu, L. (2003). Dependence Patterns Across Financial Markets: a Mixed Copula Approach, *Applied Financial Economics*, 16, 717-729.
- [14] Jorion, P. (2000). *Value at Risk: A New Benchmark For Controlling Risk*. (2. Baskı). New York: McGrawHillInc.

- [15] Jorion, P. (2001). Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, (2. Baskı). United States: McGraw-Hill.
- [16] Linsmeier, J. & Pearson, N.D. (1996). Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk, Working Paper 96-04. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [17] Li (2000). On default Correlation: A Copula Function Approach, Journal of Fixed Income, 9, 43-54.
- [18] Meneguzzo ve Vecchiato (2002) Copulas sensitivity in collateralized debt obligations and basket defaults swaps pricing and risk monitoring. Working paper. Veneto Banca.
- [19] McNeil, A. J. Frey, R. and Embrechts, P. (2005). Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, Tools. Princeton, NJ: University Press.
- [20] Morgan JP. (1996). Risk Metrics: Technical Document. New York.
- [21] Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction To Copulas*, Springer Series in Statistics.
- [22] OUYANG Zi-sheng, LIAO Hui, YANG Xiang-qun (2009). Modeling Dependence Based on Mixture Copulas and Its Application in Risk Management Appl. Math. J. Chinese Univ., 24(4): 393-401.
- [23] Roy I. (2011). Estimation of Portfolio Value at Risk Using Copula. Working Paper Series. Department Of Economic And Policy Research.